XVIII Calcul différentiel

XVIII.A Questions de cours :

1. différentielle d'une application différentiable en un extremum local.
2. Formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée + si f est inversible alors f^{-1} aussi et exprimer sa différentielle en fonction de celle de f.
3. Application constante sur un ouvert convexe
4. Différentielle en fonction des dérivées partielles

XVIII.B Exercices :

Exercice 1: * Différentielle du déterminant**

1. Calculer la différentielle du déterminant en I_n
2. En déduire la différentielle du déterminant en $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
3. En déduire la différentielle du déterminant en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 2: ** Continuité et dérivées directionnelles

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$. Est-elle continue en ce point ?

Exercice 3: * Continuité

Etudier la continuité en $(0,0)$ de l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{x^2-3xy^2}{x+y} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 4: * Produit scalaire

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Calculer la différentielle de $x \mapsto \langle f(x), f(x) \rangle$.
En déduire la différentielle de $N = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Exercice 5: ** Puissances de matrice

Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$, on pose $\phi_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $M \mapsto M^p$. Montrer que ϕ_p est différentiable et donner sa différentielle.
En déduire que l'exponentielle matricielle est différentiable en 0.

Exercice 6: ** La norme

Soit $f : E \backslash \{0\} \to E \backslash \{0\}$; $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Montrer que f est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 7: ** Continuité et dérivées directionnelles et dérivabilité**

1. Etudier la continuité en $(0,0)$ de l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{x^2-3xy^2}{x+y} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

2. Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$. Est-elle continue en ce point ?

3. Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{h(x)-h(y)}{x-y} & \text{pour } x \neq y \\ h'(x) & \text{pour } x = y \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que F est continue.

Exercice 8: * Dérivées partielles et dérivées selon tout vecteur

On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer qu'elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 9: * Dérivées selon tout vecteur et différentiabilité

On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{y^2}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer qu'elle admet des dérivées selon tout vecteur en 0. Est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 10: * Gradient affine**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - {}^t x b \end{array} \right.$$

où $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$ est le produit scalaire associé à la matrice A.
Montrer que $\nabla\phi(x) = Ax - b$.

Exercice 11: ** Multiplication dans la norme 44.3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ un réel. Soit

$$f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|ax\| \end{array} \right.$$

Montrer que f_a est différentiable et donner son gradient.

Exercice 12: * Classe $\mathcal{C}^1$ 44.9**

Soit

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ g'(x) & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ mais pas $\mathcal{C}^2$.

Exercice 13: * Majoration de la norme du gradient i.e. IAF**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit C un ouvert convexe de E. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $\nabla f(x) \leq 2025$.
Montrer que pour tout couple (a,b) d'éléments de C on a :

$$|f(a) - f(b)| \leq 2025\|a-b\|.$$

Exercice 14: * Un calcul de Jacobienne**

Calculer la Jacobienne de l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\varphi) & \mapsto & (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)) \end{array} \right.$$

Puis son déterminant

Exercice 15: * Extrema locaux d'une fonction de 3 variables**

Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz-4(x+y+z)$.

Exercice 16: * Les cordes vibrantes**

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

Exercice 17: ** Différentielle de l'inverse matriciel

Soit $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

1. Démontrez que ϕ est différentiable en I_n et calculez sa différentielle en ce point.
2. Même question en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque.